Übungen zur Vorlesung Physik für Wirtschaftsingenieure WS 2003

Übungsblatt 6

1.Wie müsste man die Erde und den Mond elektrostatisch aufladen, damit die Gravitationskraft durch elektrostatische Abstoßung kompensiert würde? Wie viel kg Elektronen braucht man dazu?
$m_E = 5{,}974 \times 10^{24}$kg, $m_M = 7{,}348 \times 10^{22}$kg, Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}67 \times 10^{-11} m^3/kg\, s^2$,
$\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}$As/Vm Elementarladung $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As ,
Elektronenmasse $m_o = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg

Lösungsvorschlag Aufgabe 1

Die Gravitationskraft zwischen Erde und Mond beträgt $F_G = \gamma \frac{m_E m_M}{d^2}$

Die Kraft zwischen zwei Ladungen (Coulombkraft) ist $F_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_E Q_M}{d^2}$

Bei Kompensation müssen beide Kräfte dem Betrag nach gleich sein $F_G = F_Q$

Dazu müsste der Einfachheit halber Erde und Mond mit der gleichen Ladung Q aufgeladen werden, d.h. $Q_E = Q_M = Q$

$\gamma \frac{m_E m_M}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{d^2}$ $Q = \sqrt{4\pi\,\varepsilon_0\,\gamma\, m_E m_M} = 5{,}708 \cdot 10^{13}$ As Andererseits ist

$Q = N \cdot e$ N – Anzahl der Elektronen, e – Elementarladung

$N = \frac{Q}{e} = 3{,}563 \cdot 10^{32}$ Elektronen Die Gesamtmasse der Elektronen ist dann

$m = N \cdot m_0 = 324{,}5$ kg

2.Theobald Tiger hat im Ausland günstig Glühlampen gekauft, und zwar eine mit 25 W und eine mit 100 W. Leider merkt er erst zuhause, dass sie für 110 V sind, versucht die Glühlampen aber trotzdem an 220 V anzuschließen: er schließt sie hintereinandergeschaltet an 220 V. – Welche der beiden Glühlampen kann er auch später noch benutzen? Bitte durch Rechnung begründen!

Lösungsvorschlag Aufgabe 2

Als erstes muss der Widerstand der Glühlampen bestimmt werden. Dies geschieht mit Hilfe der Leistungsangabe für Betrieb unter Normalbedingungen (110V) wie folgt:

U = 110 V, P_1 = 25 W, P_2 = 100 W $P = U \cdot I$ Nach dem Ohmschen Gesetz ist I = U / R

Damit wird $P = \frac{U^2}{R}$ und $R = \frac{U^2}{P}$ $R_1 = \frac{(110\,V)^2}{25\,W} = 484\,\Omega$ $R_2 = \frac{(110\,V)^2}{100\,W} = 121\,\Omega$

Für eine Reihenschaltung von Widerständen gilt:

$R_{ges} = R_1 + R_2 = 484\,\Omega + 121\,\Omega = 605\,\Omega$

Bei einer angelegten Spannung von U' = 220 V fließt also ein Strom von

$I = U'/R_{ges}$ = 220 V / 605 W = 0,36 A durch beide Glühlampen.

Hierbei fallen folgende Spannungen an den Glühlampen ab:

$U'_1 = R_1 \cdot I = 484\ W \cdot 0{,}36\ A = 176\ V$ $\qquad$ $U'_2 = R_2 \cdot I = 121\ W \cdot 0{,}36\ A = 44\ V$

Hieraus ergeben sich folgende Leistungen:

$P'_1 = U'_1 \cdot I = 64\ W$ $\qquad$ $P'_2 = U'_2 \cdot I = 16\ W$

Spannungsabfall bzw. Leistung sind für die 25 W Glühlampe zu groß, sie wird also durchbrennen.

3. Gegeben sind drei 20 Ohm-Heizwiderstände.. Welche Heizleistungen lassen sich durch unterschiedliche Zusammenschaltungen aller drei Widerstände realisieren, wenn sie an einer Spannungsquelle von 220V betrieben werden sollen.

Lösungsvorschlag Aufgabe 3

a. Alle in Reihe: $R_a = \Sigma R_i = 3R = 60\,\Omega$ $\qquad$ $P_a = U^2/R_a = (220\,V)^2/60\,\Omega = 807\,W$

b. Alle parallel: $\frac{1}{R_b} = \Sigma \frac{1}{R_i} = \frac{3}{R} = 6{,}67\,\Omega$ $\qquad$ $P_b = U^2/R_b = (220\,V)^2/6{,}67\,\Omega = 7260\,W$

c. Zwei in Reihe und dazu einer parallel: Zwei in Reihe siehe a.) $R'_c = 2R = 40\,\Omega$ Dazu

R parallel siehe b.) $\frac{1}{R''_c} = \frac{1}{R'_c} + \frac{1}{R} = \frac{R + R'_c}{R'_c \cdot R}$ $\qquad$ $R''_c = \frac{R'_c \cdot R}{R + R'_c} = \frac{800\,\Omega^2}{60\,\Omega} = 13{,}3\,\Omega$

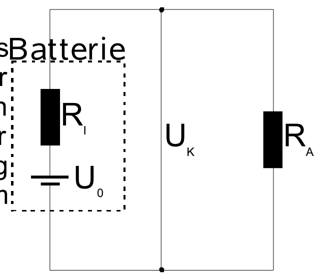
$$P_c = U^2/R_c = (220\,V)^2/13{,}3\,\Omega = 3630\,W$$

d. Zwei parallel und dazu der dritte in Reihe: $\frac{1}{R'_d} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R}$ $\qquad$ $R'_d = \frac{R}{2}$ in Reihe mit R ergibt

$R_d = R/2 + R = \frac{3}{2} R = \frac{3}{2} \cdot 20\,\Omega = 30\,\Omega$ $\qquad$ $P_d = U^2/R_d = (220\,V)^2/30\,\Omega = 1613\,W$

4. An eine Batterie mit der Urspannung U_0 und dem inneren Widerstand R_i soll ein äußerer Widerstand R_a angeschlossen werden. Wie groß muss das Verhältnis von R_a / R_i sein, damit die Leistung im Stromkreis maximal wird?

Lösungsvorschlag Aufgabe 4



Die in der Aufgabenstellung beschriebene Anordnung wird durch das nebenstehende Schaltbild wiedergegeben. Darin sind U_0 die Quellen- oder Urspannung der Batterie, U_K die Klemmenspannung an den Anschlüssen der Batterie, R_I der Innenwiderstand der Batterie und R_A der Lastwiderstand. Die über dem äußeren Widerstand abfallende Spannung ist U_K. Der durch den Widerstand fließende Strom ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz $U_K = R_A I$. Die Leistung am Last-widerstand ist

$$P = U_K \cdot I = R_A \cdot I^2 \qquad (1)$$

Die unbekannte und auch nicht gesuchte Stromstärke kann aus der Beziehung zwischen Ur- und Klemmenspannung berechnet werden. $U_K = U_0 - I R_I$ (2)

U_K mit Ohmschen Gesetz durch R_A I ersetzt ergibt $IR_A = U_0 - IR_I$ und damit (3)

$$I = \frac{U_0}{R_A + R_I} \tag{4}$$

Damit kann I in Gleichung (1) ersetzt werden und man erhält für die Leistung

$$P = R_A \cdot U_0^2 \cdot (R_A + R_I)^{-2}. \tag{5}$$

Um zu berechnen, für welchen Außenwiderstand R_A bei gegebenem Innenwiderstand R_i die von der Quelle abgegenene Leistung maximal wird, muss P nach R_A differenziert werden (1. Ableitung gleich Null setzen)

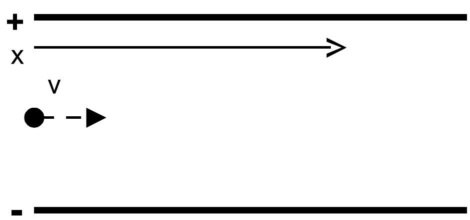
$$\frac{dP}{dR_A} = \frac{U_0^2}{(R_A + R_I)^2} - \frac{2 \cdot U_0^2 R_A}{(R_A + R_I)^3} = 0 \tag{6}$$

Die Auflösung nach R_A führt auf

$$\underline{\underline{R_A = R_I}} \tag{7}$$

Die Leistung wird also dann maximal, wenn Innenwiderstand der Batterie und Lastwiderstand im Stromkreis gleich groß sind.

5. In einer Glühkathode freigesetzte Elektronen durchlaufen ein Spannungsgefälle U und gelangen anschließend genau in der Mitte zwischen die Platten eines geladenen Kondensators, zwischen denen ein elektrisches Feld der Stärke E existiert. (Der Plattenabstand sei d) .



In welcher Entfernung x vom Kondensatoreintritt treffen die Elektronen auf welche der Platten? Gegeben sei neben U und d die Elektronenmasse m. (Elementarladung sei e.)

Lösungsvorschlag Aufgabe 5

Die Geschwindigkeit beim Eintritt in den Kondensator ergibt sich aus der kinetischen Energie, die die Elektronen beim Durchlaufen eines Potentialgefälles U erhalten (Beschleunigungsarbeit)

$$\frac{m}{2} v^2 = eU \qquad \rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot e \cdot U}$$

Im elektrischen Feld E des Kondensators erfahren die Elektronen die Kraft F = e E in Richtung der positiven Platte. (Die Wirkung der Schwerkraft ist vernachlässigbar). Legen wir in diese Richtung die z-Achse, können wir schreiben $F_z = m a_z = eE$ In x-Richtung wirkt keine Kraft $F_x = 0$.

Die Beschleunigung in z-Richtung ist dann $a_z = \frac{e}{m} E = \text{const}$

Bei konstanter Beschleunigung (siehe freier Fall) gilt für v_z und für z wenn $V_{z0} = 0$ und $z_0 = 0$

$v_z = a_z t$ und $z = \frac{a_z}{2} t^2$ und für die x-Richtung wegen $a_x = 0$ $v_x = v = \text{const}$ $x = v \cdot t$

Die Zeit bis zum Aufschlag auf die positive Platte kann aus $z = \frac{a_z}{2} t^2$ berechnet werden, wenn man für die „Fallstrecke" z = d/2 einsetzt. $t_F = \sqrt{\frac{d}{a_z}} = \sqrt{\frac{d \cdot m}{e \cdot E}}$ Während dieser Zeit fliegen die Elektronen aber in x-Richtung $x = x_F = v \cdot t_F$ weit. Mit Einsetzen der Ausdrücke für v und t_F erhält man die gesuchte Strecke x_F in allgemeiner Form

$$x_F = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot e \cdot U \cdot \frac{d \cdot m}{e \cdot E}} = \sqrt{\frac{2 d \cdot U}{E}}$$

6. Ein Kondensator C = 5µF ist mit einem veränderlichen Widerstand R in Reihe an eine Wechselspannung von 220 V angeschlossen. Bei welchem Wert von R ist die Leistung am Widerstand maximal?

Lösungsvorschlag Aufgabe 6

In dem aus einer Reihenschaltung von Widerstand und Kondensator bestehendem Wechselstromkreis berechnet sich der Gesamtwiderstand R_G wegen der auftretenden Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom nicht einfach als Summe des Ohmschen Widerstandes R und des kapazitiven Widerstandes $R_C=\frac{1}{\omega C}$ sondern als $R_G=\sqrt{R^2+(\frac{1}{\omega C})^2}$ Mit dem Ohmschen Gesetz kann man die Größe des durch den Stromkreis fließenden Stromes berechnen $\hat{I}=\hat{U}_G/R_G$.

Die Leistung am Widerstand R berechnet sich nach $P=\hat{I}^2\cdot R$ (s.o.). Ersetzt man $\hat{I}$ und R_G durch die entsprechenden Formeln erhält man für P

$$P=\frac{\hat{U}^2\cdot R}{R^2+\frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

Um heraus zu finden, bei welchem R die Leistung P maximal wird, muss $\frac{dP}{dR}$ berechnet und gleich Null gesetzt werden.

$$\frac{dP}{dR}=\frac{\hat{U}^2\cdot[(R^2+\frac{1}{\omega^2 C^2})-2R^2]}{(R^2+\frac{1}{\omega^2 C^2})^2}=0$$

Da sowohl $\hat{U}$ als auch der Nenner $(R^2+\frac{1}{\omega^2 C^2})^2\neq 0$ und endlich sind, muss gelten

$$(R^2+\frac{1}{\omega^2 C^2})-2R^2=0 \qquad \rightarrow \qquad R=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi\cdot 50\,\mathrm{Hz}\cdot 5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{As/V}}=637\,\Omega$$